

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI  
Etapa locală- 9 februarie 2013  
Filiera teoretică: profilul uman  
Barem Clasa X

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in (-\infty, 1] \\ mx + 4, & x \in (1, \infty) \end{cases}$ .

a) Pentru  $m = -2$  trasați graficul funcției

b) Determinați  $m \in \mathbb{R}$ , pentru care are loc relația  $f(2)+f(3)+\dots+f(100)=10494$ .

**Soluție:**

- a) trasarea corectă a graficului.....4p  
b)  $f(2)+f(3)+\dots+f(100)=2m+4+3m+4+\dots+100m+4$ .....1p  
 $=5049m+396$ .....1p  
Deci  $m=2$ .....1p

2. Să se calculeze următoarele expresii:

a)  $E_1 = \frac{(4^{n+1}-4^n)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-1}-7 \cdot 8^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$  unde  $n \in \mathbb{Z}$ .

b)  $E_2 = \sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}}$ .

**Soluție:**

a)  $E_1 = \frac{(4^{n+1}-4^n)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-1}-7 \cdot 8^{n-2})^{\frac{1}{3}}} = \frac{(4^n)^{\frac{1}{2}} \cdot (4-1)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-2})^{\frac{1}{3}} \cdot (8-7)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^n \cdot \sqrt{3}}{2^{n-2}} = 4\sqrt{3}$ .....3p

b)  $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$  deci  $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 1$ .

$10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = 10 + 2\sqrt{7} - 2 = 8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$ .

$\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}} = \sqrt{7} + 1$ .....2p

analog cel de - al doilea radical este  $\sqrt{7} - 1$ .....1p

deci expresia este  $E_2 = 2$ .....1p

3. a) dacă  $\log_{20} 2 = a$  să se exprime  $\log_{20} 32$  în funcție de  $a$ .

b) dacă  $\log_{24} 12 = a$  să se exprime  $\log_{64} 27$  în funcție de  $a$ .

**Soluție:**

a)  $\log_{20} 32 = 5a$ .....2p

b) Folosind formulele de la logaritmi din  $\log_{24} 12 = a$  se obține că  $\log_2 3 = \frac{3a-2}{1-a}$ .....3p

iar  $\log_{64} 27 = \frac{3a-2}{2(1-a)}$ .....2p

4. a) Rezolvați în numere reale ecuația  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2$

b) Rezolvați în numere reale sistemul  $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ .

**Soluție:**

a) condiții  $x+6 \geq 0, x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ .....1p  
 $\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{x-2}$

Prin ridicare la pătrat se obține  $\sqrt{x-2} = 1$ .....1p

deci  $x=3$  soluție.....1p

b)  $y = 1 - x$

$3^x + 3^{1-x} = 4$ .....1p

$3^x + \frac{3}{3^x} = 4$ .....1p

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$ .....1p

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$ .....1p